



## Olympiades de Mathématiques 2021

### COMPOSITION UNIQUE DE MATHÉMATIQUES

31 OCTOBRE 2021

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3 HEURES

CALCULATRICE NON PROGRAMMABLE AUTORISÉE

LES EXERCICES SONT INDÉPENDANTS

**Attention Attention !!**

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

#### Exercice 1

1. Dans le cadre de l'organisation de la première édition de leurs olympiades, les responsables de la structure **ECOSTATS** décident d'attribuer des matricules à leurs candidats. Pour cela, ils supposent qu'un matricule est formé du jour et du mois de l'année d'un étudiant dans cet ordre. (Par exemple, le Matricule 1903 correspond à l'élève né un 19 Mars). Quelle est la probabilité que plusieurs (au moins deux) candidats aient le même matricule ?
2. Ecrire sous forme de fraction le nombre le nombre  $x = 2.554554554 \dots$
3. Calculer  $F(t) = \int \frac{1}{\sin(t) + \tan(t)} dt$
4. Déterminer les racines du polynôme  $x^4 - 5x^2 - 6$
5. Calculer la limite lorsque  $x$  tend vers 0 de la fonction  $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$
6. Soient  $A(-1, 2, 1)$  ;  $B(1, -6, -1)$  ;  $C(2, 2, 2)$  et  $I(0, 1, -1)$  ; Si  $K(1, 0, 1)$  et  $J(-2, 0, 0)$  et  $(S)$  la sphère de centre  $I$  et de rayon 2, déterminer  $(S) \cap (JK)$ .
7. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $\sqrt{x^2 - 2x} \geq x + 2$
8. Montrer que  $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$  avec  $p$  et  $n$  des entiers naturels non nuls tels que  $n \geq p$

9. En vous servant de la relation  $(g \times h)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x)$ , calculer la dérivée d'ordre  $n$  quelconque, de la fonction  $x^3 e^x$
10. Répondre par **Vrai** ou **Faux** : Soit  $f$  une fonction numérique d'une variable **si  $f$  est continue alors elle est dérivable.**

### Exercice 2

Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes,  $U_1$ ,  $U_2$  et  $U_3$  contenant chacune  $k$  boules, où  $k$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3. Il y a trois boules noires dans  $U_1$  deux boules noires dans  $U_2$  et une boule noire dans  $U_3$ . Toutes les autres boules dans les urnes sont blanches. Les boules sont indiscernables au toucher.

Une partie se déroule de la manière suivante : le joueur lance le dé :

-  S'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne  $U_1$ , note sa couleur et la remet dans  $U_1$  ;
-  S'il obtient un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans  $U_2$ , note sa couleur et la remet dans  $U_2$  ;
-  Si le numéro amené par le dé n'est ni 1 ni un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans  $U_3$ , note sa couleur et la remet dans  $U_3$ .

On désigne par  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $N$  les événements suivants :

$A$  : « Le dé amène le numéro 1 »,  $B$  : « Le dé amène un multiple de 3 »,  $C$  : « Le dé amène un numéro qui n'est ni 1 ni un multiple de 3 » et  $N$  : « La boule tirée est noire ».

1. Le joueur joue une partie.

-  Montrer que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à  $\frac{5}{3k}$  ;
-  Calculer la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire ;
-  Déterminer  $k$  pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à 0.5 ;
-  Déterminer  $k$  pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à  $1/30$ .

2. Dans cette question,  $k$  est choisi pour que la probabilité d'obtenir une boule noire en jouant une partie soit égale à  $1/30$ . Le joueur fait 20 parties, indépendantes les unes des autres. Calculer, sous forme exacte puis arrondie à  $10^{-3}$  près la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire.

### Exercice 3

- I. Pour  $n$  entier supérieur ou égal à 1, on définit les fonctions  $f_n$  sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_n(x) = x^n e^{x^2}$
1. Etudier les variations de  $f_1$  et tracer son graphe
  2. Comparer  $f_{2n}$  et  $f_{2n+1}$
  3. Pour  $p$  entier strictement positif fixé, étudier la convergence de la suite  $(U_n)$  définie par  $U_0 > 1$  et la relation de récurrence  $U_{n+1} = f_p(U_n)$
  4. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$
- II. Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on rappelle que la partie entière de  $x$ , notée  $E(x)$ , correspond au plus grand entier inférieur ou égal à  $x$ . Pour  $x$  non nul, on pose  $f(x) = xE(\frac{1}{x})$
1. Calculer  $I = \int_{1/2}^2 f(x) dx$
  2. Déterminer  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$
  3. Expliciter  $f$  sans symbole de partie entière et étudier sa continuité sur  $\mathbb{R}$

### Problème

Considérons une fonction  $\lambda$  continue, des fonctions  $f$  et  $g$  dérivables et définissons-la par :

$$\mu : x \rightarrow \int_{f(x)}^{g(x)} \lambda(t) dt.$$

1. Calculer  $\mu'(x)$
2. On considère dans cette question le cas particulier :  $\lambda(t) = e^t/t$  sur  $\mathbb{R}^*$ ,  $f(x) = x$  et  $g(x) = 2x$ 
  - a. Exprimer  $\mu'(x)$
  - b. Peut-on prolonger la fonction  $\mu$  par continuité en 0 ?
  - c. Peut-on prolonger la fonction  $\mu'$  par continuité en 0 ?
  - d. Esquisser le graphe de  $\mu$
3. Dans cette question,  $\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) = x$  et  $g(x) = 2x$  de sorte que la fonction  $\mu$  soit directement définie sur  $\mathbb{R}$ .

Trouver  $\lim_{x \rightarrow \infty} \mu(x)$ .

Indication : Etudier la monotonie de  $\lambda$  et en déduire un encadrement de l'intégrale